2.2.9 Grafické řešení rovnic a nerovnic

Předpoklady: 2110, 2206

Př. 1: Popiš hlavní myšlenku řešení příkladů v minulé hodině. Na co si musíme dát pozor?

Když nemůžeme nějaký krok řešení udělat pro všechna uvažovaná čísla, postup rozdělíme na víc cest a pro každou část definičního oboru ji řešíme zvlášť.
Na konci každé cesty musíme dát pozor, zda řešení, která jsme získali, patří mezi čísla, se kterými jsme v této cestě počítali.

Př. 2: Řeš početně i graficky rovnici $2x+4=1-x$.

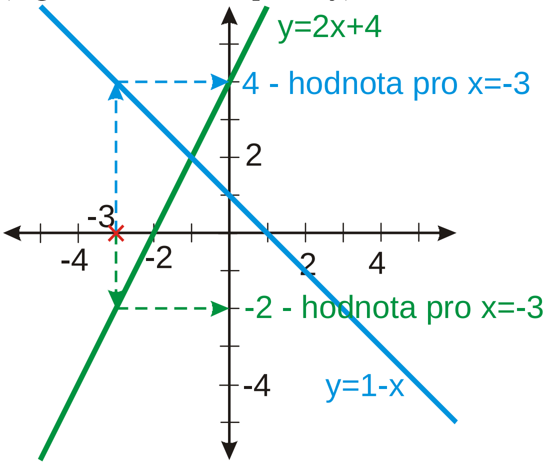
Početně: Už umíme.

$2x+4=1-x$

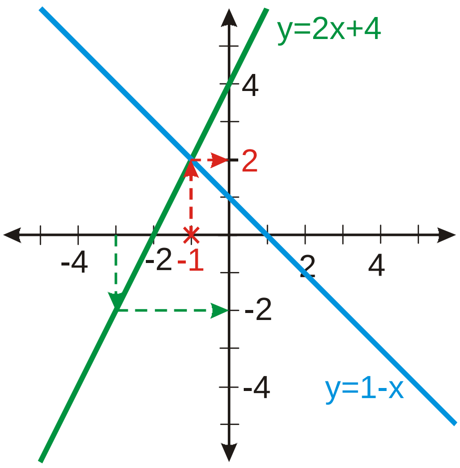
$3x=-3$

$x=-1$ $\qquad K=\{-1\}$

Graficky: Každá ze stran rovnice je výrazem pro lineární funkci $\Rightarrow$ nakreslíme obě funkce (v grafu budou dvě přímky).



Hodnoty funkcí udávají hodnoty výrazů na obou stranách rovnice.
Při řešení rovnice se snažíme zjistit, kdy se výrazy na obou stranách rovnice rovnají stejnému číslu $\Rightarrow$ u grafů hledáme, kdy mají obě funkce stejnou hodnotu (místo, kde mají obě funkce v grafu body stejně vysoko) $\Rightarrow$ hledáme průsečík obou funkcí (bod, kde mají stejnou hodnotu x i y).



Z obrázku je vidět, že řešením rovnice je $x=-1$. Pro toto *x* vyjdou hodnoty výrazů na obou stranách stejně $y=2$, jak je vidět i ze zkoušky:

$L:\ 2x+4=2\cdot(-1)+4=2$

$P:\ 1-x=1-(-1)=1+1=2$

$L=P$

Podobně můžeme řešit i nerovnice.

Př. 3: Řeš početně i graficky nerovnici $0,5x+1<2x-2$.

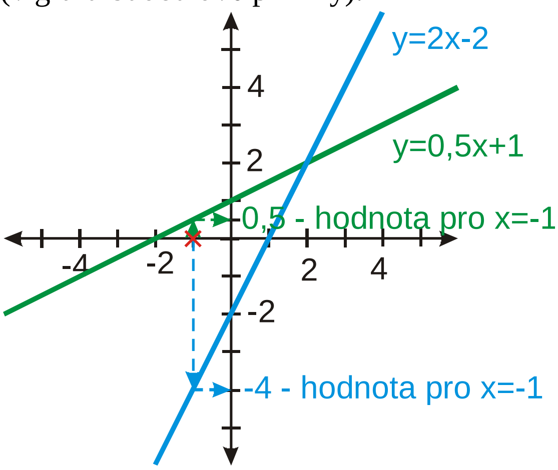
Početně: Už umíme.

$0,5x+1<2x-2$

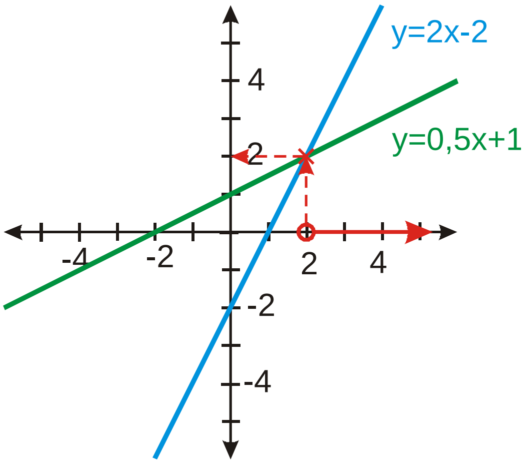
$3<1,5x$

$2<x$ $\qquad K=(2;\infty)$

Graficky: Každá ze stran nerovnice je výrazem pro lineární funkci $\Rightarrow$ nakreslíme obě funkce (v grafu budou dvě přímky).



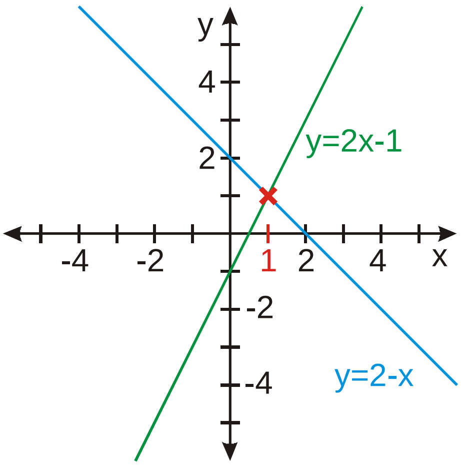
Hodnoty funkcí udávají hodnoty výrazů na obou stranách nerovnice.
Hledáme, kdy má výraz vpravo větší hodnotu než výraz vlevo $\Rightarrow$ hledáme *x*, pro která má funkce $y=2x-2$ body výše než funkce $y=0,5x+1$.



Z obrázku je vidět, že řešením nerovnice je interval $(2;\infty)$.

Př. 4: Řeš graficky rovnici $2-x=2x-1$. Výsledek potvrď výpočtem.

Levá strana: $y=2-x$ Pravá strana: $y=2x-1$



Zdá se, že $K=\{1\}$.

$2-x=2x-1$

$3=3x$

$3=3x$

$x=1$ $K=\{1\}$

Př. 5: Zhodnoť výhody a nevýhody grafické metody řešení rovnic a nerovnic.

Nevýhody:

- Při normálním rýsování často pouze přibližný výsledek.
- Většinou časově náročnější.
- Pokud by strany rovnice obsahovaly složitější výrazy, museli bychom upravovat.

Výhody:

- Snadno získáme předběžnou představu o řešitelnosti i u příkladů, které nejsou početně řešitelné v rámci středoškolské matematiky.
- Názornost a celkový přehled o řešení, více toho „vidíme“.

Pedagogická poznámka: Jednou z věcí, která studentům činí značné problémy, je schopnost posoudit výhodnost různých postupů. Řešení podobných úkolů by jim snad mohlo pomoci.

Př. 6: Řeš početně i graficky nerovnici $ax+b \le 0$, $a<0$.

Početně:

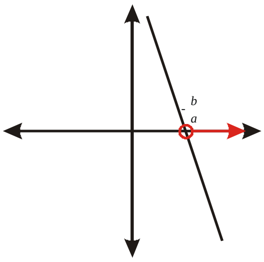
$ax+b \le 0$

$ax \le -b \quad / : a$ (dělíme záporným číslem, obracíme znaménko)

$x \ge -\frac{b}{a}$ $\quad K = \left\langle -\frac{b}{a}; \infty \right)$

Graficky:

Funkce $y = ax+b$ je pro $a<0$ klesající. Hledáme *x*, pro která jsou hodnoty menší než nula.



$K = \left\langle -\frac{b}{a}; \infty \right)$

Pedagogická poznámka: I když příklad není nový, zase se najdou někteří, kteří zapomenou obrátit znaménko nebo nakreslit klesající funkci.

Dalším problémem bývá, že klesající funkci je možné nakreslit jakkoliv, někteří se dokonce snaží spočítat dva body grafu, které by mohli spojit.

Nejdůležitější je, aby se obě řešení shodovala. U mnoha studentů je běžné, že jim vyjdou naprosto odlišné výsledky a nijak je to nevzrušuje. To je zásadní chyba, protože nutnost dospět ke stejnému výsledku po libovolné správné cestě je zcela zásadní vlastností matematiky.

Pedagogická poznámka: Dva následující příklady mají za cíl procvičovat schopnost úvahy a spojování poznatků. Mají smysl pouze v případě, že studenti budou postupovat podle zadání, tedy nejdříve vypočítat, pak odhadnout a pak ověřit. Zejména při řešení prvního z nich byli pro mě až nečekaně úspěšní.

Př. 7: Vyřeš početně rovnici $x+1 = 3x-2(x-1)+1$. Po početním vyřešení odhadni, jak bude vypadat grafické řešení rovnice. Svůj odhad poté ověř grafickým řešením.

$x+1 = 3x-2(x-1)+1$

$x+1 = 3x-2x+2+1$

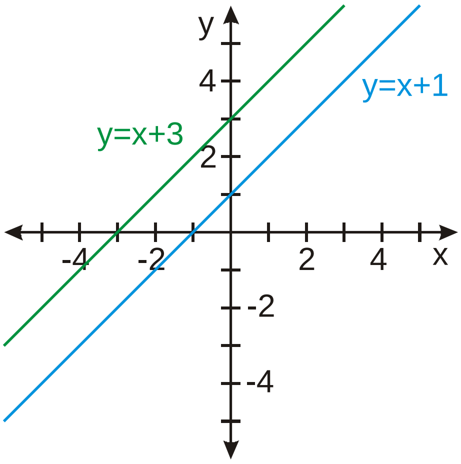
$x+1 = x+3$

$0x = 2$ $\quad K = \emptyset$

Rovnice nemá řešení $\Rightarrow$ grafy funkcí pro obě strany se nesmí nikde protnout $\Rightarrow$ při grafickém řešení musíme získat dvě rovnoběžné přímky.

Grafické řešení:

Levá strana: $y = x+1$ $\quad$ Pravá strana: $y = 3x-2(x-1)+1 = 3x-2x+2+1 = x+3$



Přesně, jak jsme odhadovali. Na obrázku jsou dvě rovnoběžné přímky.

Př. 8: Vyřeš početně rovnici $x+2=\dfrac{x+\dfrac{8x+24+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{6}}{3}}{4}$. Na základě výsledku řešení rovnice urči bez výpočtu upravený tvar výrazu na pravé straně. Odhad potvrď výpočtem.

$$x+2=\dfrac{x+\dfrac{8x+24+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{6}}{3}}{4} \quad /\cdot 4$$

$$4x+8=x+\dfrac{8x+24+\dfrac{3x+2x+x}{6}}{3}$$

$$3x+8=\dfrac{8x+24+\dfrac{6x}{6}}{3} \quad /\cdot 3$$

$$9x+24=8x+24+x$$

$$9x+24=8x+24+x$$

$$0x=0$$

$$K=R$$

V grafickém řešení musí být obě strany reprezentovány shodnými přímkami $\Rightarrow$ pravá strana rovnice se musí také rovnat výrazu $x+2$.

$$\dfrac{x+\dfrac{8x+24+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{6}}{3}}{4}=\dfrac{x+\dfrac{8x+24+\dfrac{3x+2x+x}{6}}{3}}{4}=\dfrac{x+\dfrac{8x+24+\dfrac{6x}{6}}{3}}{4}=$$

$$=\dfrac{x+\dfrac{8x+24+x}{3}}{4}=\dfrac{x+\dfrac{9x+24}{3}}{4}=\dfrac{x+3x+8}{4}=\dfrac{4x+8}{4}=x+2$$

Shrnutí: Strany lineární rovnice (nerovnice) můžeme znázornit pomocí lineárních funkcí a tak získat grafické řešení.